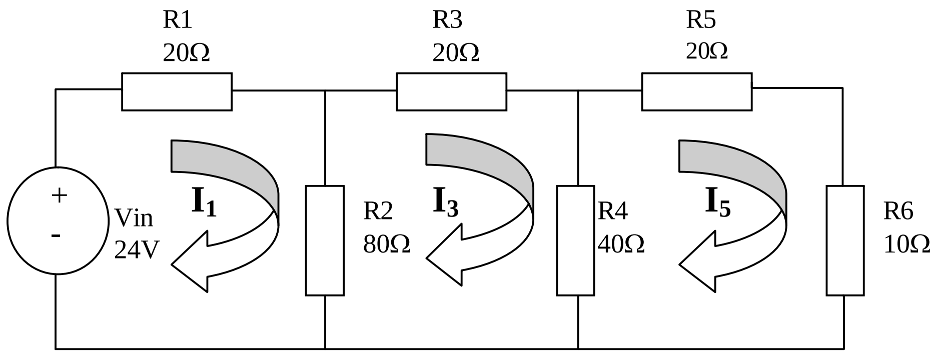
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2008-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **15/08/2008**
DACBHCC **1H50M**

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN SUSTITUTORIO DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

Dado el sistema lineal:



Determine Todas las corrientes: I_1, I_3 e I_5.
Para lo cual se pide:

a) Represente el sistema lineal usando las leyes de Kirchoff.
En el primer lazo:
$V_{in} = I_1R_1 + R_2(I_1 - I_3)$
Realice los otros lazos.

b) Es posible la factorización de cholesky?. Justifique

c) Si la respuesta al ítem anterior es verdadera, realice la factorización de cholesky a la matriz A.

d) Resuelva el sistema Lineal usando la factorización anterior.

Solución

$$A: \quad U = I_1R_1 + R_2(I_1 - I_3) = I_1(R_1 + R_2) - I_3R_3$$

$$B: \quad 0 = I_3R_3 + (I_3 - I_1)R_4 - (I_1 - I_3)R_2$$
$$= -I_1R_2 + I_3(R_2 + R_3 + R_4) - I_5R_4$$

$$C: \quad 0 = I_5R_5 + I_5R_6 - (I_3 - I_5)R_4$$
$$= -I_3R_4 + I_5(R_4 + R_5 + R_6)$$

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_3+R_4+R_5) & -R_4 \\ 0 & -R_4 & (R_4+R_5+R_6) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 100 & -80 & 0 \\ -80 & 140 & -40 \\ 0 & -40 & 70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & -80 & 0 \\ -80 & 140 & -40 \\ 0 & -40 & 70 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si A es definida positiva y simétrica es posible la factorización de cholesky

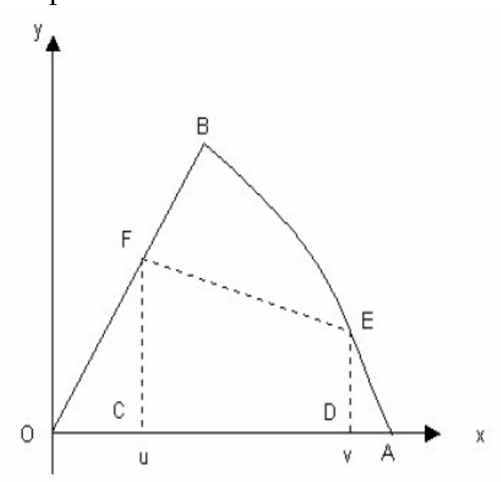
Comprobando
Como 140 es la entrada más grande, la cual se encuentra en la diagonal y además es simétrica ➔ es una matriz definida positiva.
Eig(A)= {22.9431, 77.2986, 209.7583}

$$L^t = \begin{bmatrix} 10.0000 & -8.0000 & 0 \\ 0 & 8.7178 & -4.5883 \\ 0 & 0 & 6.9962 \end{bmatrix}$$

L*y=b
$y=[2.4000, \quad 2.2024 \quad 1.4444]^t$
$L^t x=y$
$X=[\quad 0.5290, \quad 0.3613. \quad 0.2065]^t$ Amperios

Problema 2

La figura muestra una placa de metal *OAB* con la cual se quiere fabricar una pieza trapezoidal *CDEF*.



Si el segmento OB pertenece a la recta y = 2x, el arco BA pertenece a la parábola $y = -\frac{x^2}{4} - x + 3$, y las abscisas de C y D son u y v, respectivamente. Se pide:

a) Obtener el sistema no lineal que permita resolver el problema de maximizar el área de la región trapezoideal.
b) Considerar el punto inicial $(u_0, v_0) = (0.5, 1.5)$ y obtener la aproximación al cabo de 2 iteraciones. Estimar el área máxima.

Solución:

a) $Area = A(u,v) = (v-u)\left[u - \frac{v^2}{8} - \frac{v}{2} + \frac{3}{2}\right]$

Área Máxima

$$\frac{\partial A}{\partial u} = 0 \Rightarrow -4u + \frac{v^2}{4} + 3v - 3 = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0 \Rightarrow 3u - \frac{3v^2}{4} - 2v + \frac{uv}{2} + 3 = 0$$

El sistema lineal a resolver es:

$$-4u + \frac{v^2}{4} + 3v - 3 = 0$$
$$3u - \frac{3v^2}{4} - 2v + \frac{uv}{2} + 3 = 0 \;\bigstar$$

b)

Tenemos:

$$f_1(u,v) = -4u + \frac{v^2}{4} + 3v - 3$$

$$f_2(u,v) = 3u - \frac{3v^2}{4} - 2v + \frac{uv}{2} + 3$$

La matriz Jacobiana esta dada por

$$J = J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{v}{2}+3 \\ 3+\frac{v}{2} & -\frac{6v}{4}-2+\frac{u}{2} \end{bmatrix}$$

Iteración 1:

$[u^{(1)},v^{(1)}]$= [0.9919; 2.0081]
Area ≈0.9997

Iteración 2:
$[u^{(2)},v^{(2)}]$= [1.00011; 2.00012]
Area ≈1.0000

Problema 3

A través de una tarjeta de adquisición de datos electrónico conectado a un sistema de compresión de 1kg de aire isotérmicamente (T=298 °K = cte.) a través de un pistón, arrojo los siguientes valores de Volumen y presión en 7 instantes de tiempo.

$V(m3) * 10^{-3}$	1	2	3	4	5	6	7
$p(Pa)*10^{7}$	8.5	4.2	2.8	2.1	1.7	1.4	1.2

Se desea determinar el trabajo necesario para efectuar dicho proceso, sabiendo que la ecuación de estado del aire es: p=m*Ra*T/V   y el trabajo se calcula a partir de,

$W = \int_{V_1}^{V_7} p dV$, V(m3), T(°K), m(Kg) y p(Pa), para ello desarrollamos un ajuste polinómico, usando la instrucción de Matlab: polyfit(V,p,3), devolviendo el siguiente resultado:

```
1.0e+014 *
 -9.4444    0.1450   -0.0007    0.0000
```

a) Calcule W, usando el método de Simpson de 3/8, el polinomio de ajuste y dividiendo todo el intervalo de integración en 10 puntos igualmente espaciado.

b) Calcule W, usando la integral analítica a partir de la ecuación de estado y compare con el valor anterior. Considere Ra=287.08 J / kg K.

Solución

a) Dividiendo en 10 puntos se tiene:

V=(1 1.6667 2.3333 3.0000 3.6667 4.3333 5 5.6667 6.3333 7) *10e-3
Usando el polinomio de ajuste:
P=(8.3429 5.6265 3.7793 2.6333 2.0207 1.7735 1.7238 1.7038 1.5454 1.0810)*10e7
Aplicando 3 veces adecuadamente

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right)-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\varepsilon) \quad donde\ x_0<\varepsilon<x_3}$$

Se tiene que I=1.6871e+005

b) Desarrollando la integral analítica se tiene que:

W=m*Ra*T*ln(V2/V1)
Por lo tanto
I=1.6647e+005

Problema 4

Un móvil que parte del origen (0,0) describe una trayectoria de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-4x-y=e^t$$
$$\frac{dx}{dt}+3x+y=0$$

a) Determine su ubicación $(x(t),y(t))$ cuando $t=0.05\ y\ 0.10$ seg. usando Runge Kutta de orden 2.
b) Determine los errores cometidos teniendo en cuenta que la solución general es:

$$x=C_1\cos(t)+C_2\sin(t)-\frac{e^t}{2}$$
$$y=(C_1-3C_2)sen(t)-(3C_1+C_2)\cos(t)+2e^t$$

Comente sus resultados.

Solución

a) Despejando de manera conveniente:

$$\frac{dx}{dt}=-3x-y$$
$$\frac{dy}{dt}=e^t+10*x+3*y$$
$$x(0)=0$$
$$y(0)=0$$

Por Runge-Kutta 2

t	x	y
0.00	0	0
0.05	-0.00125000	0.05503178
0.10	-0.00512662	0.12044607

b) Calculando las constantes, obtenemos la solución exacta:

x = 1/2*cos(t) + 1/2*sin(t) - 1/2*exp(t)
y = -sin(t) - 2*cos(t) + 2*exp(t)

t	x (exacto)	y (exacto)	error (x)	error(y)
0.00	0	0		
0.05	-0.00127083	0.05506250	2.0833e-005	3.0725e-005
0.10	-0.00516669	0.12050009	4.0070e-005	5.4020e-005

Se observa una precisión de 4 dígitos en los resultados.

Los Profesores